

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE



# INTRODUCTION AUX TECHNIQUES DE COUPLAGE UTILISÉES EN PHYSIQUE DES RÉACTEURS

MANU – MATHÉMATIQUES POUR LA  
NEUTRONIQUE

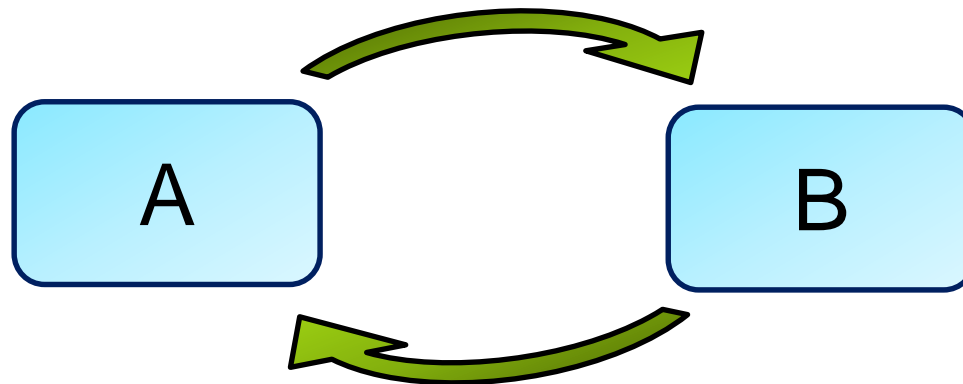
Cyril PATRICOT

[www.cea.fr](http://www.cea.fr)

CEA | NOVEMBRE 2017

## 1. Qu'est-ce qu'un couplage ?

- Situation mêlant plusieurs domaines ne pouvant être décrits séparément.
- Très courant !
- Exemple :
  - Une conversation.
  - Accident de perte de débit sur un réacteur en fonctionnement.



## 2. Démonstration de sûreté, l'approche classique

- Utilisation d'un code spécialisé dans une discipline.
- Modélisation simplifiée des autres disciplines.
- Définition de critères de sûreté.
- Introduction de pénalités et d'hypothèses conservatives par rapport à ces critères.
- Vérification de leur respect avec une marge suffisante.

## 3. L'approche multiphysique

- Relativement **récente** et **complémentaire** de l'approche classique.
- Principe : éviter les simplifications en mettant en œuvre des modélisations fines dans chacune des disciplines.
- Nécessite généralement de faire travailler ensemble plusieurs codes.
- Les incertitudes doivent être estimées.
- Objectif : Renforcer les démonstrations de sûreté, compréhension physique, réduction des marges, designs plus innovants etc.

## 4. Objectif de la présentation

- Présenter :
  - Ce qui se fait déjà en physique des réacteurs.
  - Quelques pistes que j'aimerais suivre.
- Récolter avis / conseils / expériences / idées etc.

- I. **Méthodes générales de résolution numérique de problèmes couplés discrétisés**
  
- II. **La factorisation « quasi-statique » du flux neutronique pour des problèmes multiphysiques**
  
- III. **Exemple de résolution intriquée**
  
- IV. **Conclusion**

- I. **Méthodes générales de résolution numérique de problèmes couplés discrétisés**
- II. **La factorisation « quasi-statique » du flux neutronique pour des problèmes multiphysiques**
- III. **Exemple de résolution intriquée**
- IV. **Conclusion**

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 1. Problématique

- Résolution de  $(x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{d_2})$  :

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

- Parfois écrit sous la forme :

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) - x_1 = 0 \\ F_2(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) - x_2 = 0. \end{cases}$$



# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 2. Méthodes de point fixe

### ■ Le point fixe :

- Résolution de  $x = f(x)$
- Algorithme itératif :  $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$ .

### ■ Deux façons de s'y ramener :

- Gauss-Seidel (ou itérations de Picard) :

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} = f_2(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}) \end{cases}$$

- Jacobi (convergence plus lente mais parallélisable) :

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} = f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \end{cases}$$

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 2. Méthodes de point fixe

### ■ Conditions de convergence :

■ Soit  $J_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial u_2}(a) & \dots \\ \frac{\partial f}{\partial u_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial u_2}(a) & \dots \end{bmatrix}$  jacobienne de  $f$  en  $a$ .

- On note  $\rho(J_a) = \max |\lambda_i|$ , le rayon spectral de  $J_a$  ( $\lambda_i =$  valeurs propres).
- Condition nécessaire :  $\rho(J_{x_{sol}}) < 1$ . Suffisante si  $x^{(0)}$  dans un certain voisinage.
- Condition suffisante :  $\sqrt{\rho(J_x^t J_x)} \leq M < 1$  sur un voisinage de  $x_{sol}$  et  $x^{(0)}$  pris dans ce voisinage.
- Interprétation : « Le couplage ne doit pas être trop fort ».

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 2. Méthodes de point fixe

### ■ Propriété de convergence :

#### ■ Convergence linéaire :

$$\exists a, k, \quad \|x^{(n)} - x_{sol}\| \leq a \cdot k^n \|x^{(0)} - x^{(1)}\|$$

■ Si on a  $\sqrt{\rho(J_x^t J_x)} \leq M < 1$  sur un voisinage de  $x_{sol}$ , alors  $M$  peut jouer le rôle de  $k$ .

■ Interprétation : « Converge d'autant plus vite que le couplage est faible ».

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 3. Accélération du point fixe

### ■ Relaxation :

■ On pose  $x^{(n+1)} = (1 - \alpha)x^{(n)} + \alpha f(x^{(n)})$ , avec  $\alpha > 0$ .

■  $\alpha_{\text{optimum}} = \frac{1}{1 - f'(x_{\text{sol}})}$  à une dimension.

■  $\alpha_{\text{optimum}} = \frac{1}{1 - \frac{\max_i \lambda_i + \min_i \lambda_i}{2}}$  à  $n > 1$  dimensions,  $\lambda_i$  valeurs propres de  $J_{x_{\text{sol}}}$ .

■  $\alpha_{\text{optimum}}$  dépend des propriétés de la solution, elle-même inconnue...

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 3. Accélération du point fixe

### ■ $\Delta^2$ d'Aitken (1 dimension):

- Consiste à chercher la relaxation optimale en posant :

$$f'(x_{sol}) = \frac{f(x^{(n+1)}) - f(x^{(n)})}{x^{(n+1)} - x^{(n)}}.$$

- S'exprime généralement ainsi (Aitken-Steffensen) :

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= x^{(n)} - \frac{(\Delta x^{(n)})^2}{\Delta^2 x^{(n)}} \\ &= x^{(n)} - \frac{(f(x^{(n)}) - x^{(n)})^2}{(f(f(x^{(n)})) - f(x^{(n)})) - (f(x^{(n)}) - x^{(n)})}. \end{aligned}$$

- Plusieurs généralisations à plus d'une dimension.

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 3. Accélération du point fixe

### ■ Accélération d'Anderson (n dimensions) :

- On pose  $x^{(n+1)} = \sum_{i=0}^m \alpha_i f(x^{(n-i)})$
- Les  $\alpha_i$  minimisent  $\|\sum_{i=0}^m \alpha_i (f(x^{(n-i)}) - x^{(n-i)})\|$  sous la contrainte  $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ .
- Revient, lorsque  $f$  est linéaire, à chercher  $x_{min} = \sum_{i=0}^m \alpha_i x^{(n-i)}$  qui minimise la norme du résidu  $f(x_{min}) - x_{min}$  dans l'espace engendré par  $\{x^{(n-m)}, \dots, x^{(n)}\}$ .
- $m$  est généralement pris à 2 ou 3.

## 4. Algorithme de Newton

- Ecriture du problème sous la forme :

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = 0, \quad x = (x_1, x_2).$$

- Soit  $J_x$  jacobienne de  $F$  en  $x$ .

- Algorithme :

- On se donne  $x^{(0)}$

- Pour  $k = 1, 2, \dots$  jusqu'à convergence :

- Résoudre  $J_{x^{(k-1)}} \delta x = -F(x^{(k-1)})$  en  $\delta x$ ,

- Poser  $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \delta x$ .

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 4. Algorithme de Newton

### ■ Condition de convergence :

- $K \|x^{(0)} - x_{sol}\| < 1$ ,  $K$  étant une mesure de la non-linéarité de  $F$  autour de la solution :

$$K = \max_{x \in B(x_{sol}, \|x_{sol} - x^{(0)}\|)} \left( \frac{1}{2} \|J_x^{-1}\| \|D^2 F_x\| \right)$$

- Interprétation : « La convergence est toujours possible, pourvu qu'on soit suffisamment proche de la solution. »



## 4. Algorithme de Newton

■ Propriété de convergence :

■ Convergence quadratique (très rapide !) :

$$\|x^{(n)} - x_{sol}\| \leq \frac{(K\|x^{(0)} - x_{sol}\|)^{2^n}}{K}$$

■ Optimale.

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 5. Variantes du Newton

### ■ Introduction d'une relaxation $\alpha$ :

- On se donne  $x^{(0)}$
- Pour  $k = 1, 2 \dots$  jusqu'à convergence :
  - Résoudre  $J_{x^{(k-1)}} \delta x = -F(x^{(k-1)})$  en  $\delta x$ ,
  - Poser  $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha \delta x$ .



$0 < \alpha \leq 1$ , déterminé pour assurer que  $\|x^{(k)} - x_{sol}\| < \|x^{(k-1)} - x_{sol}\|$



Plus robuste à une mauvaise initialisation,  $\alpha$  retourne à 1 dès que possible.

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 5. Variantes du Newton

- Entre deux solveurs échangeant un petit nombre de variables, l'un des deux étant basé sur un algorithme Newton en interne :

- Solveur 1 calcule les  $\frac{\partial(x_1)_i}{\partial(x_2)_j}$ .

- Solveur 2, basé sur Newton, modifié (résolution de  $\delta x_2$ ) :

$$(x_1)_i \rightarrow (x_1)_i^{k-1} + \sum_j \frac{\partial(x_1)_i}{\partial(x_2)_j} (\delta x_2)_j$$

 Equivalent à un algorithme de Newton sur  $f_2 \circ f_1$ .

 Couplage entre solveurs au sein d'un code ?

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 6. Une variante célèbre du Newton : le JFNK (Jacobian-free Newton-Krylov)

### ■ Principe :

- Algorithme de Newton basé sur un algorithme itératif pour résoudre le système linéaire  $J_{x^{(k-1)}} \delta x = -F(x^{(k-1)})$ .
- A chaque itération de la résolution du problème linéaire, la jacobienne n'intervient qu'en multipliant un vecteur.
- On utilise l'approximation :

$$J_u v = \frac{F(u + \varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon}$$



Un appel des codes à chaque itération de la résolution du problème linéaire. La jacobienne n'a pas à être calculée ni stockée.

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 6. Une variante célèbre du Newton : le JFNK (Jacobian-free Newton-Krylov)

### ■ Avantage :

- Comportement d'un Newton entre solveurs couplés « en boîte noire ».

### ■ Inconvénient :

- Un appel des codes par itération du solveur linéaire : peut être cher.
- A dans les faits besoin d'un bon préconditionnement.
- Paramétrage un peu délicat.

# 1. MÉTHODES GÉNÉRALES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS DISCRÉTISÉS

## 7. Utilisation de ces techniques de couplage en physique des réacteurs

- Point-fixe (parfois avec relaxation) = très répandu par « les utilisateurs » : assez robuste et facile à faire !
- Newton = usage normal en interne solveur. Convergence optimal, robuste sauf pathologie.
- JFNK beaucoup étudié mais le bilan semble contrasté.
- Pas mal de techniques d'accélération de point fixe ou de variantes de Newton n'ont pas encore été beaucoup regardées semble-t-il.

- I. Méthodes générales de résolution numérique de problèmes couplés discrétisés
- II. La factorisation « quasi-statique » du flux neutronique pour des problèmes multiphysiques
- III. Exemple de résolution intriquée
- IV. Conclusion

## 2. LA FACTORISATION « QUASI-STATIQUE » DU FLUX POUR DES PROBLÈMES MULTIPHYSIQUES

### 1. Présentation de la factorisation quasi-statique

■ **Factorisation QS** : Méthode de résolution des équations cinétiques :

- Allège la contrainte sur le pas de temps neutronique.
- Permet ainsi de travailler sur le couplage ?

■ **Basée sur un constat** : souvent peu d'évolution de la forme de la nappe de puissance.

■ Définitions d'opérateurs :

$$I_{1/V} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = (-Tr - D + F^p + S) \Phi + S_{n.ret.}$$

Inertie
Transport
Disparition
Fission prompt
Transfert (*scattering*)



## 2. LA FACTORISATION « QUASI-STATIQUE » DU FLUX POUR DES PROBLÈMES MULTIPHYSIQUES

### 1. Présentation de la factorisation quasi-statique

- Principe : factorisation du flux en une fonction amplitude  $N$  et une fonction de forme  $\mathcal{F}$ :

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = N(t)\mathcal{F}(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t).$$

- $N$  calculée avec des pas de temps fins en association avec les autres disciplines,  $\mathcal{F}$  mise à jour plus rarement (coûte cher).
- Nécessité de rajouter une condition pour définir la factorisation :

$$\langle I_{1/V}\mathcal{F}(t), \Phi_0^* \rangle = K(t).$$



Fonction de pondération. Flux adjoint de l'état initial utilisé.

## 1. Présentation de la factorisation quasi-statique

- Injection de la factorisation, et produit scalaire avec  $\Phi_0^*$  :

~~$$N \left\langle I_{1/V} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, \Phi_0^* \right\rangle + \frac{\partial N}{\partial t} \langle I_{1/V} \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle = N \langle (-Tr - D + F^p + S) \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle + \langle S_{n.ret.}, \Phi_0^* \rangle$$~~

Nul grâce à la condition

- Equations de la cinétique point :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\rho - \beta_{eff}}{\Lambda} N + \sum_l \lambda_l c_l \\ \frac{\partial c_l}{\partial t} = -\lambda_l c_l + \frac{\beta_{eff}^l}{\Lambda} N \end{array} \right.$$

Généralise la notion de réactivité à la cinétique !

Avec

$$\rho = \frac{\langle (-Tr - D + F + S) \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle}{\langle F \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle}, \quad \beta_{eff} = \frac{\langle \sum_l F_l^d \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle}{\langle F \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle}, \quad \Lambda = \frac{\langle I_{1/V} \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle}{\langle F \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle}, \quad c_l = \frac{\langle \chi_l C^l, \Phi_0^* \rangle}{\langle I_{1/V} \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle}$$

$$\beta_{eff}^l = \frac{\langle F_l^d \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle}{\langle F \mathcal{F}, \Phi_0^* \rangle}$$

## 2. LA FACTORISATION « QUASI-STATIQUE » DU FLUX POUR DES PROBLÈMES MULTIPHYSIQUES

### 1. Présentation de la factorisation quasi-statique

- Equation sur la forme obtenue en injectant la factorisation dans l'équation initiale.

- Le système quasi-statique :

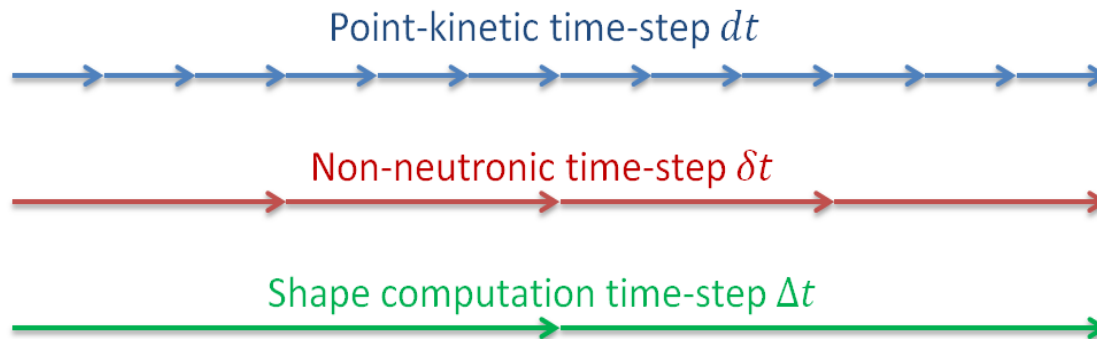
$$\left\{ \begin{array}{l} I_{1/V} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F} + \mathcal{F} \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} \right) = (-Tr - D + F^p + S) \mathcal{F} + \frac{S_{n.ret.}}{N} \\ \frac{\partial C^l}{\partial t} = -\lambda_l C^l + N \sum_{g'} \beta_l \nu \sigma_f^{g'} \mathcal{F}^{g'} \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\rho - \beta_{eff}}{\Lambda} N + \sum_l \lambda_l c_l \\ \frac{\partial c_l}{\partial t} = -\lambda_l c_l + \frac{\beta_{eff}^l}{\Lambda} N. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Cinétique de} \\ \text{la forme du flux} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\rho - \beta_{eff}}{\Lambda} N + \sum_l \lambda_l c_l \\ \frac{\partial c_l}{\partial t} = -\lambda_l c_l + \frac{\beta_{eff}^l}{\Lambda} N. \end{array} \right\} \text{Cinétique point : évolution de l'amplitude}$$

- Equivalent à la cinétique spatiale classique à pas de temps convergé.
- Utilisée depuis longtemps dans les codes de neutronique, mais pas pour le couplage.

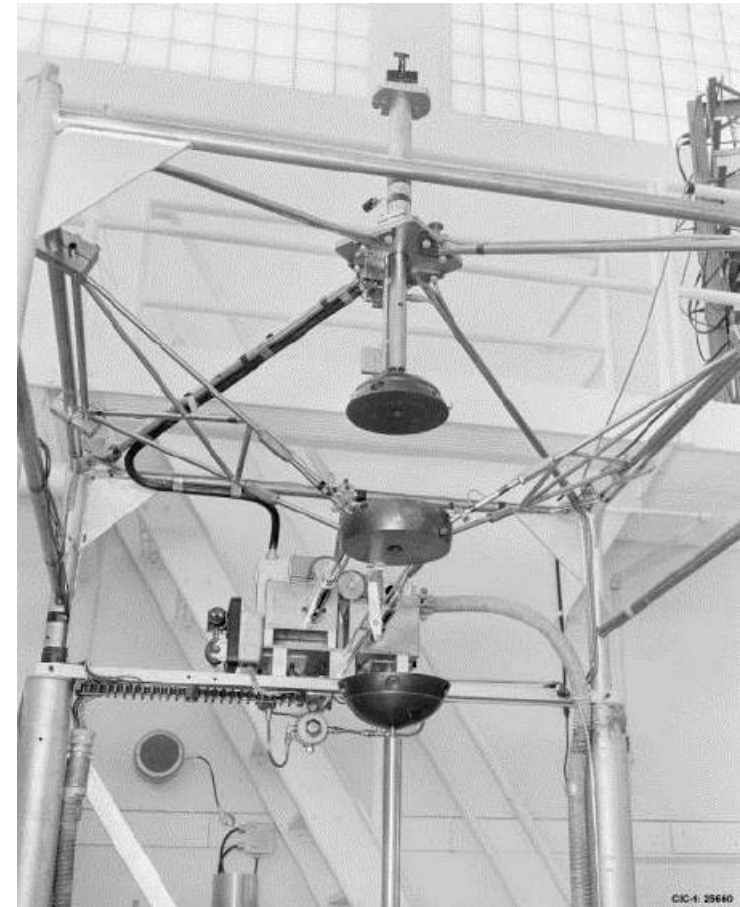
## 2. Principe de son utilisation pour des couplages

- Couplage cinétique-point avec les autres disciplines sur un pas de temps court.
- Mise à jour de la forme du flux plus rarement.



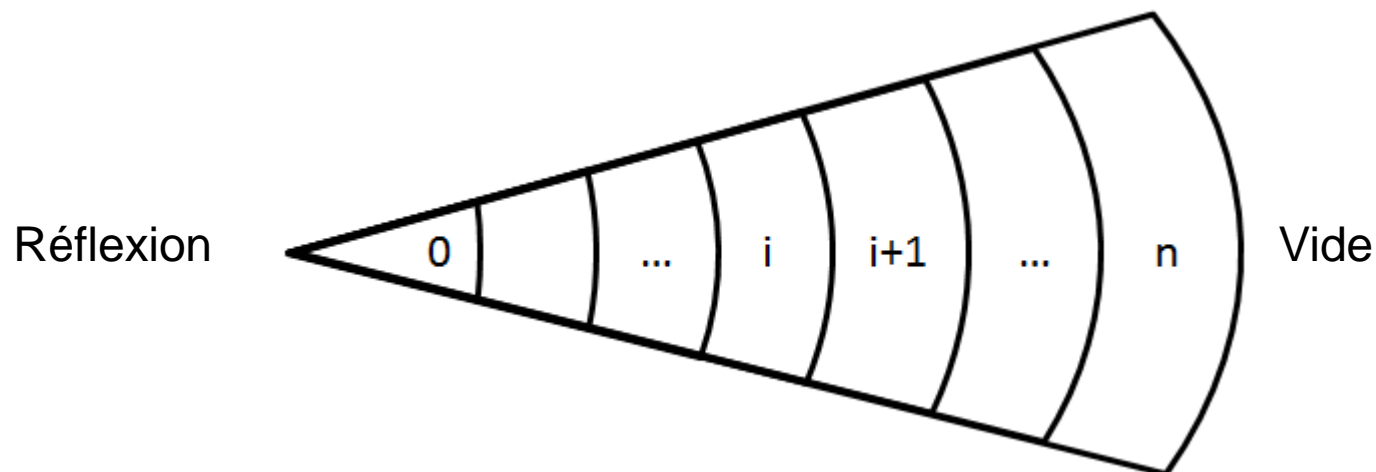
### 3. Présentation de l'expérience Godiva

- Expérience américaine des années 50 (et déclassifiée).
  - Sphère d'uranium métallique enrichi à 93.5% en U5. Rayon de 8.7407cm (52kg).
  - Excursions critiques promptes : Dilatation thermique (d'après PSI  $\approx +40^{\circ}\text{C}$  et  $+0.1\%$  en volume), d'où étouffement de la réaction en chaîne.  $\approx 5 \cdot 10^{-4}\text{s}$ .



### 4. Les modèles couplés

- **Neutronique** : transport simplifié (SP3) cinétique simulé par diffusion (9 groupes d'énergie).
  - Prise en compte du sens de propagation des neutrons.
  - « Simulé » pour réutiliser un solveur de diffusion.



## 4. Les modèles couplés

- **Thermique** : diffusion instationnaire adiabatique.

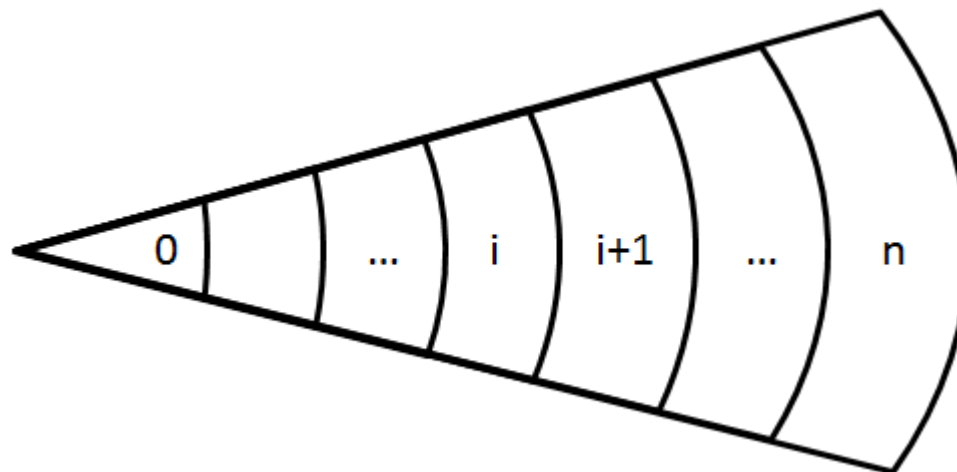
Evolution temporelle

Dégagement de puissance neutronique

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + P$$

Diffusion

Symétrie



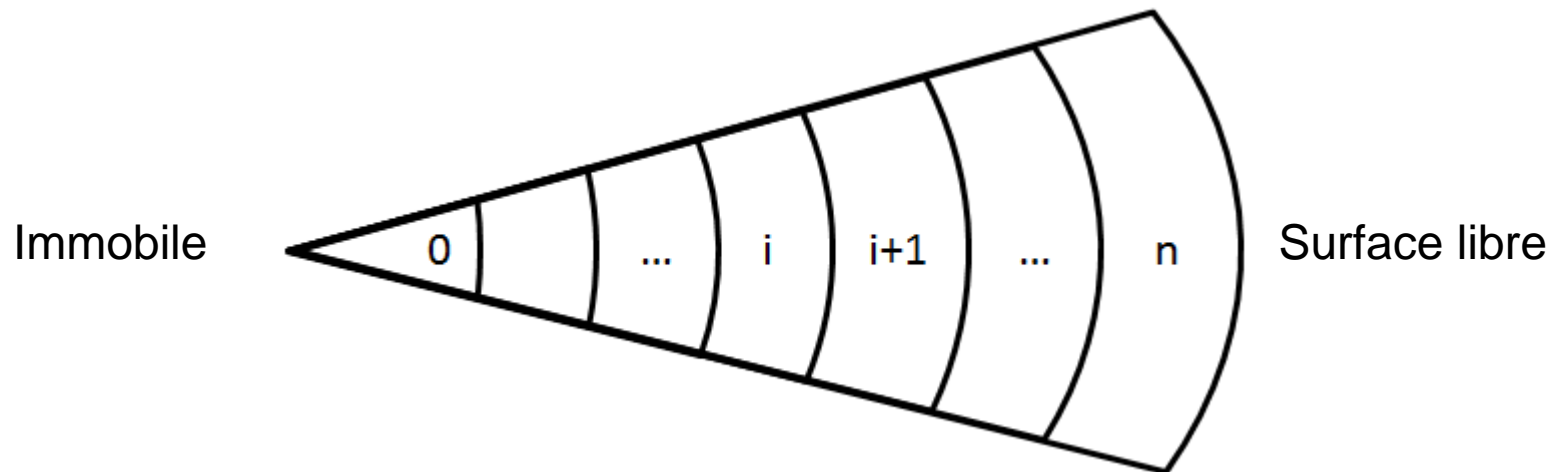
Adiabatique

### 4. Les modèles couplés

- **Mécanique** : thermoélasticité dynamique linéaire isotrope.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F$$

Inertie                      Amortissement                      Rigidité  
 ↓                                      ↓                                      ↓  
 ← Effort de dilatation thermique



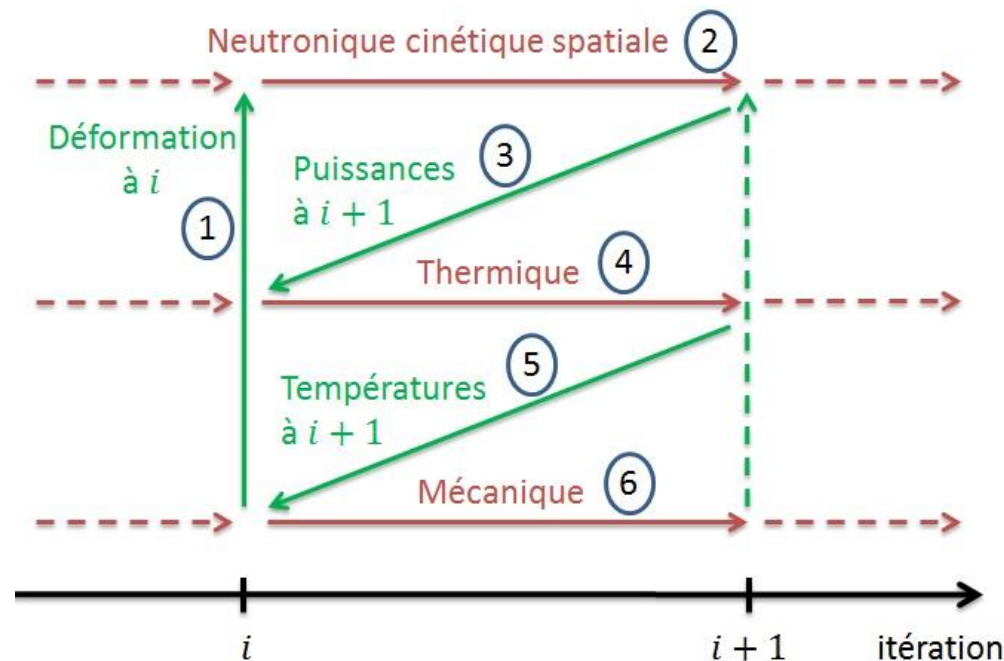


### 5. Physique du couplage

- Mécanique → Neutronique :
  - Dilatation du milieu d'où augmentation des fuites neutroniques.
- Neutronique → Thermique :
  - Dégagement de puissance.
- Thermique → Mécanique :
  - Dilatation thermique.
- Autres effets négligeables (notamment pas de Doppler : spectre très dur et peu d'U8).

### 6. Etablissement d'une référence

- Schéma pour un pas de temps :



- Itérations à chaque pas de temps pour converger sur un schéma **implicite** en temps.

## 2. LA FACTORISATION « QUASI-STATIQUE » DU FLUX POUR DES PROBLÈMES MULTIPHYSIQUES

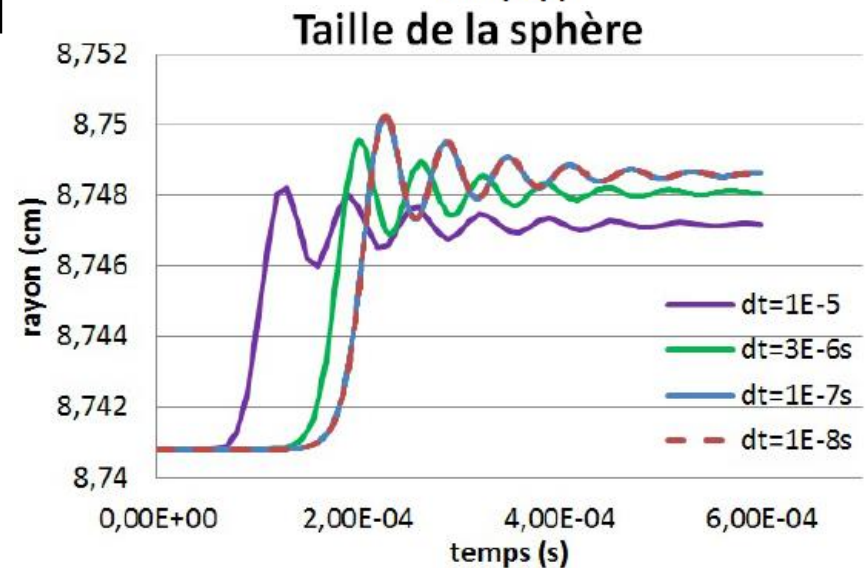
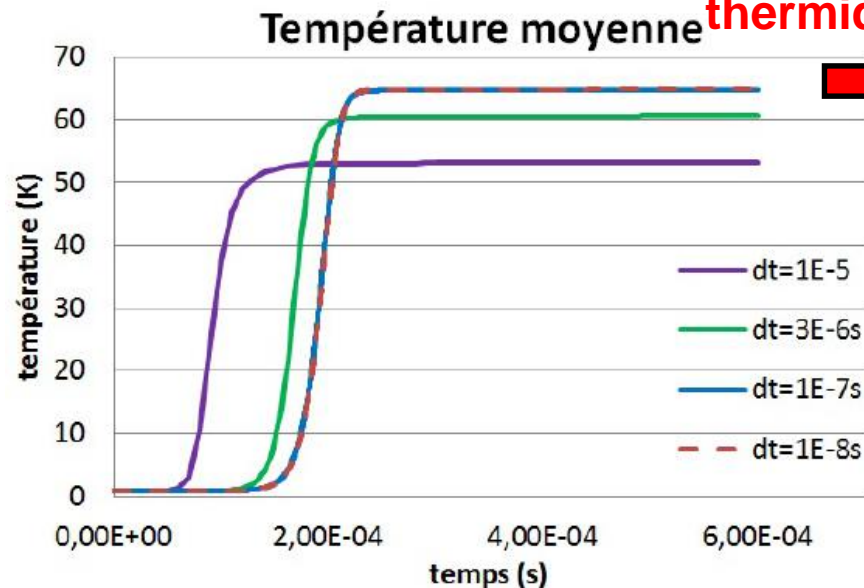
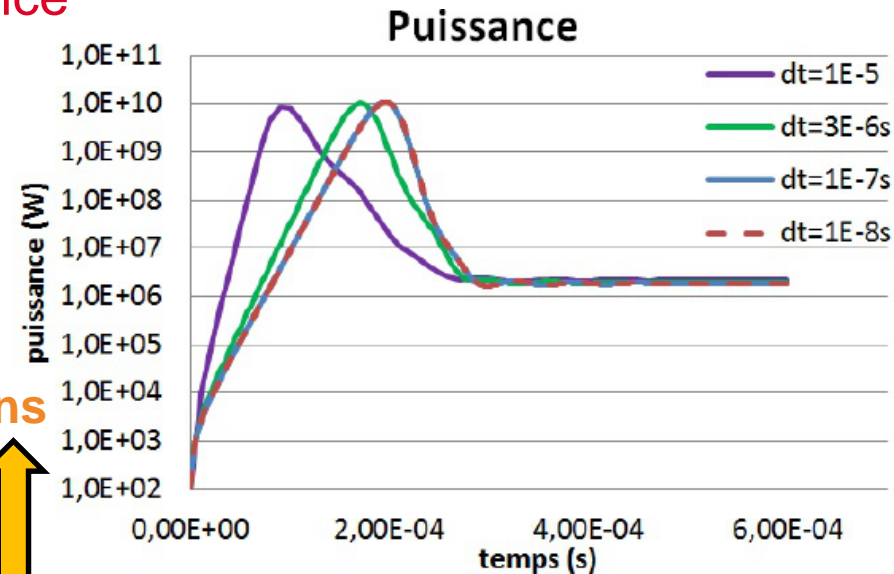
### 6. Etablissement d'une référence

- Convergé avec  $dt = 10^{-7}$  s.
- La neutronique impose  $dt$ .

Dégagement puissance

Déformations

Dilatation thermique



### 6. Etablissement d'une référence

- Comparaison à l'expérience et à PSI :

Grandeur	Expérience	Calcul PSI	Nos résultats
"Période" (temps de multiplication par $e$ de la puissance sans contre-réaction)	11.6 $\mu$ s	11.7 $\mu$ s	11.6 $\mu$ s
Excès en réactivité initial	1.082\$		758pcm, soit 1.065\$
Puissance maximale	8.6GW	5.2GW	10.8GW
Élévation de température moyenne finale		38K	65K
Variation de volume		0.13%	0.27%

- Physique des phénomènes bien captée.



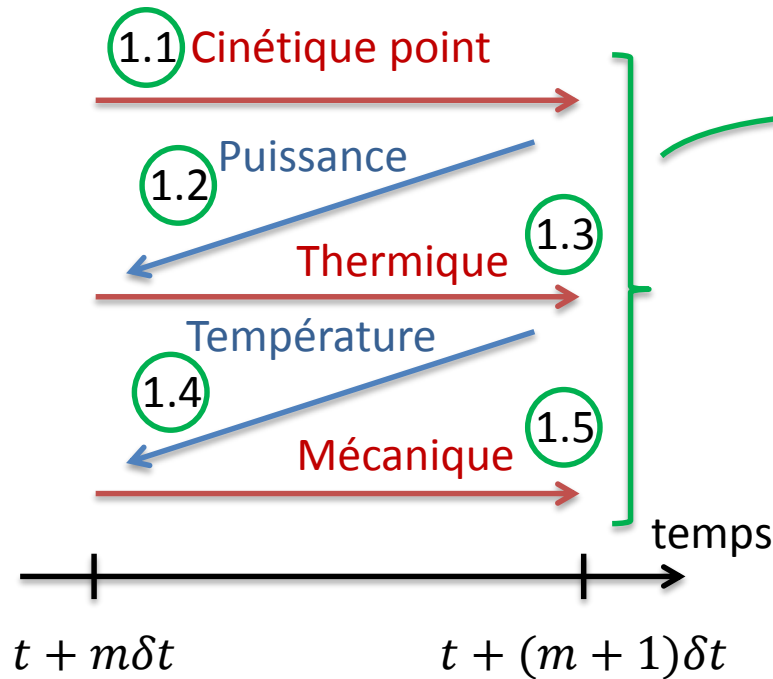
Temps de calcul : 5h38

## 2. LA FACTORISATION « QUASI-STATIQUE » DU FLUX POUR DES PROBLÈMES MULTIPHYSIQUES

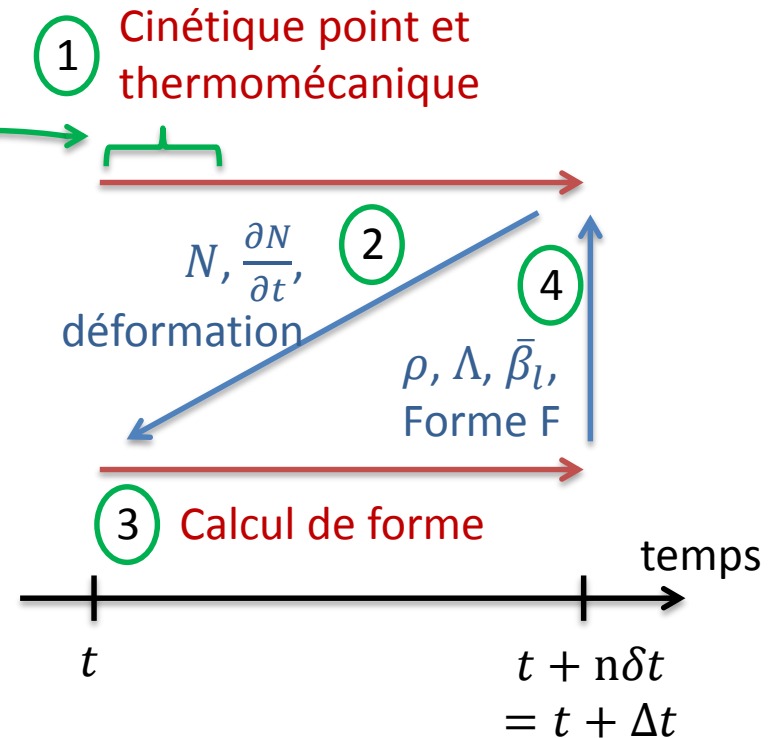
### 7. Introduction de la factorisation QS

- Schéma à deux niveaux :

Sur un pas de temps fin  $\delta t$  fixé à  $10^{-7}s$  :



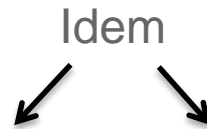
Sur un pas de temps large  $\Delta t$  :



- Un seul passage ici (pas d'itération).

### 7. Introduction de la factorisation QS

■ Résultats :



Grandeur	Référence ( $\Delta t = 10^{-7}s$ )	QS $\Delta t = 10^{-7}s$	QS $\Delta t = 10^{-5}s$
Puissance maximale	10.8GW	10.9GW	16.4GW
Élévation de température moyenne finale	65K	66K	89K
Variation de volume	0.27%	0.27%	0.37%
Temps de calcul	5h38	5h57	13min



Gain max envisageable grâce à la réduction du nombre d'appels à la cinétique de forme

### 8. Amélioration du couplage avec $\Delta t = 10^{-5} s$

- Idée : lever l'hypothèse  $\rho$  (réactivité, paramètre clef de la cinétique point) constante sur  $\Delta t$ .
- Trois techniques de couplage testées :

- **Gauss-Seidel** : Itérations à chaque pas de temps. Interpolation linéaire de la réactivité à partir de la deuxième itération :

$$\rho(t + m\delta t) \approx \rho(t) + \frac{m\delta t}{\Delta t}(\rho(t + \Delta t) - \rho(t))$$

- **Prédiction par extrapolation linéaire** de la réactivité :

$$\rho(t + m\delta t) \approx \rho(t) + \frac{m\delta t}{\Delta t}(\rho(t) - \rho(t - \Delta t))$$

- **Prédiction par contre-réaction** mécanique :

$$\rho(t + m\delta t) \approx \rho(t) + \frac{\rho(t) - \rho(0)}{r(t) - r(0)}(r(t + m\delta t) - r(t))$$

Rayon de la sphère



## 2. LA FACTORISATION « QUASI-STATIQUE » DU FLUX POUR DES PROBLÈMES MULTIPHYSIQUES

### 8. Amélioration du couplage avec $\Delta t = 10^{-5} s$

■ Résultats :

Grandeur	QS $\Delta t = 10^{-7} s$	QS $\Delta t = 10^{-5} s$	Gauss- Seidel	Extra- polation linéaire	Contre- réaction
Puissance maximale	10.9GW	16.4GW	10.5GW	12.6GW	11.0GW
Élévation de température moyenne finale	66K	89K	64K	72K	66K
Variation de volume	0.27%	0.37%	0.27%	0.30%	0.28%
Temps de calcul	5h57	13min	25min	14min	14min

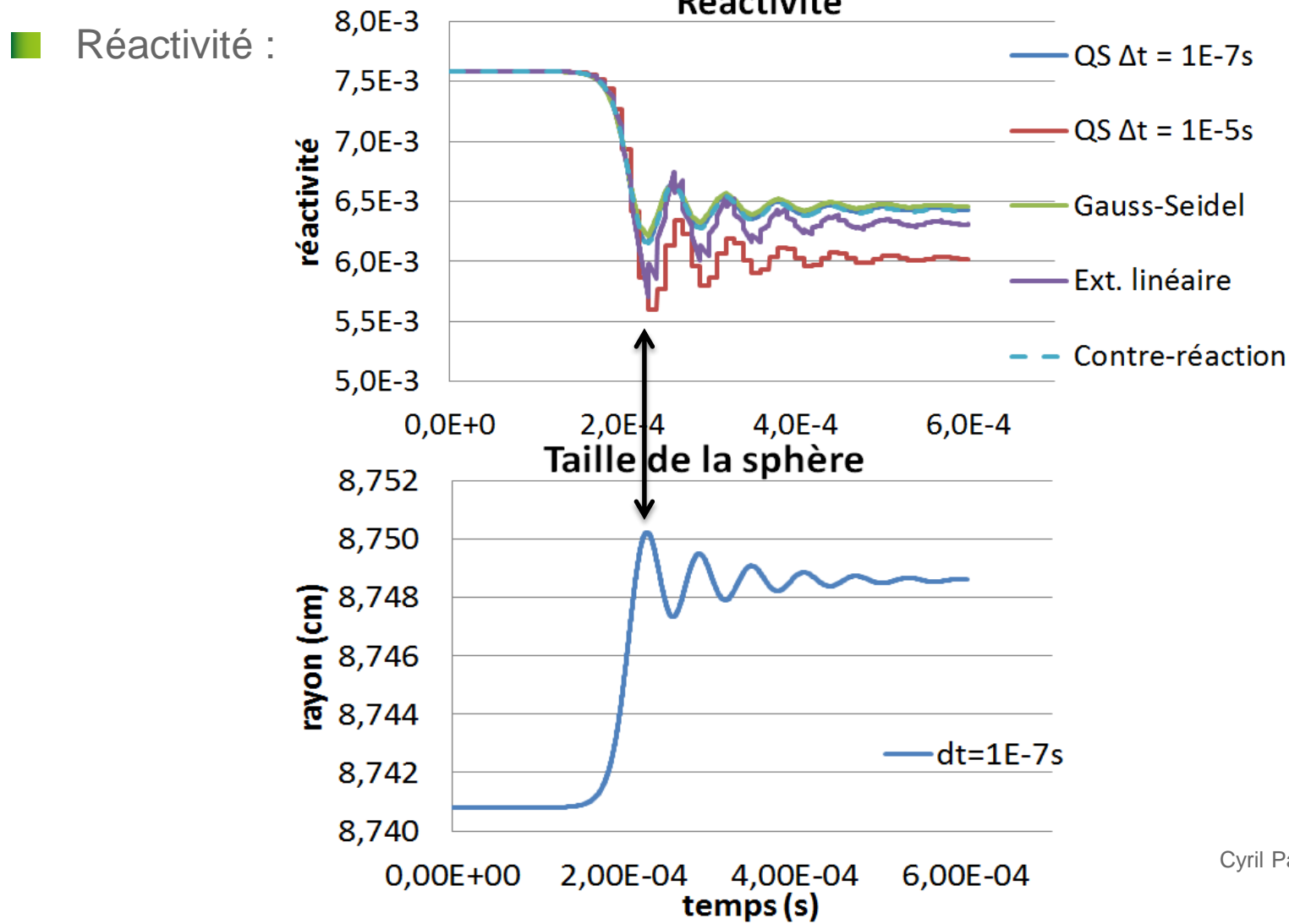


Gauss-Seidel et surtout contre-réaction très efficaces !  
Gauss-Seidel ne nécessite pas de connaissance a priori



## 2. LA FACTORISATION « QUASI-STATIQUE » DU FLUX POUR DES PROBLÈMES MULTIPHYSIQUES

### 8. Amélioration du couplage avec $\Delta t = 10^{-5} s$



- I. Méthodes générales de résolution numérique de problèmes couplés discrétisés
- II. La factorisation « quasi-statique » du flux neutronique pour des problèmes multiphysiques
- III. Exemple de résolution intriquée**
- IV. Conclusion

### 3. EXEMPLE DE RÉOLUTION INTRICUÉE

#### 1. Contexte du travail présenté

- **Objectif** : démontrer la faisabilité d'un solveur générique et véritablement multidisciplinaire, mêlant neutronique et thermomécanique.
- **Modèles** : calcul transitoire, phénoménologie identique à Godiva.
- **Démarche** : résoudre ensemble les systèmes linéaires issus des problèmes discrétisés (éléments finis). Schéma temporel implicite.

### 3. EXEMPLE DE RÉOLUTION INTRIKUÉE

#### 2. Modèles couplés

- **Neutronique** : diffusion en cinétique.  $C_l$  éliminé sur chaque pas de temps par résolution analytique.

$$A_{total}\Phi(\Delta t) = S_{total}$$

- $A_{total}$  et  $S_{total}$  construits à partir de matrices simples :

— $(K_{ne})_{ij}^g = \int_{\Omega} D^g \nabla \xi_i \cdot \nabla \xi_j d\Omega,$	→ Diffusion des neutrons
— $(R)_{ij} = \int_{\Omega} \sigma \xi_i \xi_j d\Omega,$	→ Interactions avec la matière
— $(M)_{ij} = \int_{\Omega} \xi_i \xi_j d\Omega.$	→ Effets d'inertie

Dépendance non linéaire aux déformations mécaniques

### 3. EXEMPLE DE RÉOLUTION INTRICUÉE

#### 2. Modèles couplés

- **Mécanique** : On simplifie un peu en se mettant en quasi-statique.

$$KU = F.$$

$$(K)_{ij} = \int_{\Omega_0} \left( \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{b}}_i) \text{Tr}(\underline{\underline{b}}_j) + 2\mu \text{Tr}(\underline{\underline{b}}_i \cdot \underline{\underline{b}}_j) \right) d\Omega_0 \longrightarrow \text{Rigidité mécanique}$$

$$(F)_i = \int_{\Omega_0} 3\kappa\alpha(T - T_0) \text{Tr}(\underline{\underline{b}}_i) d\Omega_0. \longrightarrow \text{Dilatation thermique}$$

Linéaire en la température

### 3. EXEMPLE DE RÉOLUTION INTRIKUÉE

#### 2. Modèles couplés

■ **Thermique** : Diffusion thermique cinétique

$$A_{th}\mathcal{T}(\Delta t) = B_{th},$$

Capacité thermique

Diffusion thermique

$$- (A_{th})_{ij} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_0} \rho C_p \xi_i \xi_j d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \lambda \nabla \xi_i \nabla \xi_j d\Omega_0,$$

$$- (B_{th})_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_0} \rho C_p \left( \sum_j \mathcal{T}_j(0) \xi_j \right) \xi_i d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} P \xi_i d\Omega_0.$$

Effet d'historique

Dégagement de puissance,

Linéaire en la puissance neutronique

# 3. EXEMPLE DE RÉOLUTION INTRIKUÉE

## 3. Couplage

- Schéma **implicite** convergé avec algorithme de **Newton** : Jacobienne obtenue :

$$J_X = \begin{pmatrix} K & C_{TM} & 0 \\ 0 & A_{th} & C_{NT} \\ C_{MN} & 0 & A_{total} \end{pmatrix}$$

- $C_{TM}$  issue du second membre mécanique :

$$(F)_i = \sum_j \underbrace{\int_{\Omega_0} 3\kappa\alpha\xi_j Tr(\underline{b}_i) d\Omega_0 \mathcal{T}_j}_{-(C_{TM})_{ij}} - \underbrace{\int_{\Omega_0} 3\kappa\alpha T_0 Tr(\underline{b}_i) d\Omega_0}_{(F')_i}$$

- $C_{NT}$  du thermique :

$$(B_{th})_i = \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_0} \rho C_p \left( \sum_j \mathcal{T}_j(0) \xi_j \right) \xi_i d\Omega_0}_{(B_{th})'_i} + \sum_{g,j} \underbrace{\int_{\Omega_0} K^g \xi_j \xi_i d\Omega_0 \phi_j^g}_{-(C_{NT})'_{ij}}$$

# 3. EXEMPLE DE RÉOLUTION INTRICUÉE

## 3. Couplage

- Schéma **implicite** convergé avec algorithme de **Newton** : Jacobienne obtenue :

$$J_X = \begin{pmatrix} K & C_{TM} & 0 \\ 0 & A_{th} & C_{NT} \\ C_{MN} & 0 & A_{total} \end{pmatrix}$$

- Expression de  $C_{MN}$  :  $C_{MN} = C_{MN}^S + C_{MN}^A$  avec :

$$(C_{MN}^S)_{ij}^{g' \rightarrow g} = -\delta_{g,g'} \frac{1}{V^g \Delta t} \sum_k \int_{\Omega_0} \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k Tr(\underline{\underline{b}}_j) d\Omega_0 \phi_k^g(0)$$

$$(C_{MN}^A)_{ij}^{g' \rightarrow g} =$$

$$\delta_{g,g'} \sum_k \left( \frac{1}{V^g \Delta t} \int_{\Omega_0} \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k Tr(\underline{\underline{b}}_j) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} 2D_0^g (Tr(\underline{\underline{b}}_j) \underline{\underline{Id}} - \underline{\underline{b}}_j) \underline{\underline{\nabla}}_0 \bar{\xi}_i \cdot \underline{\underline{\nabla}}_0 \bar{\xi}_k d\Omega_0 \right) \phi_k^g(\Delta t)$$



### 3. EXEMPLE DE RÉOLUTION INTRICUÉE

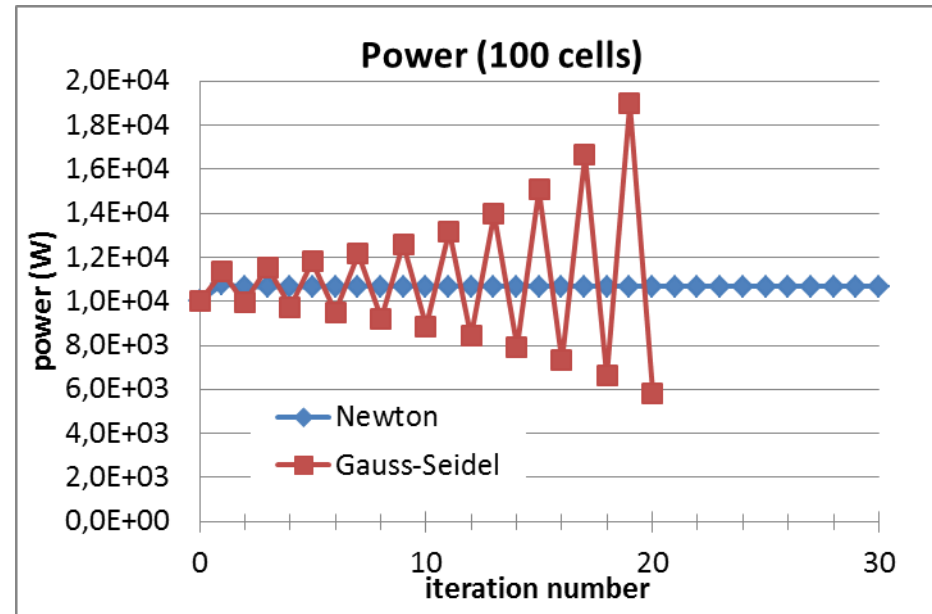
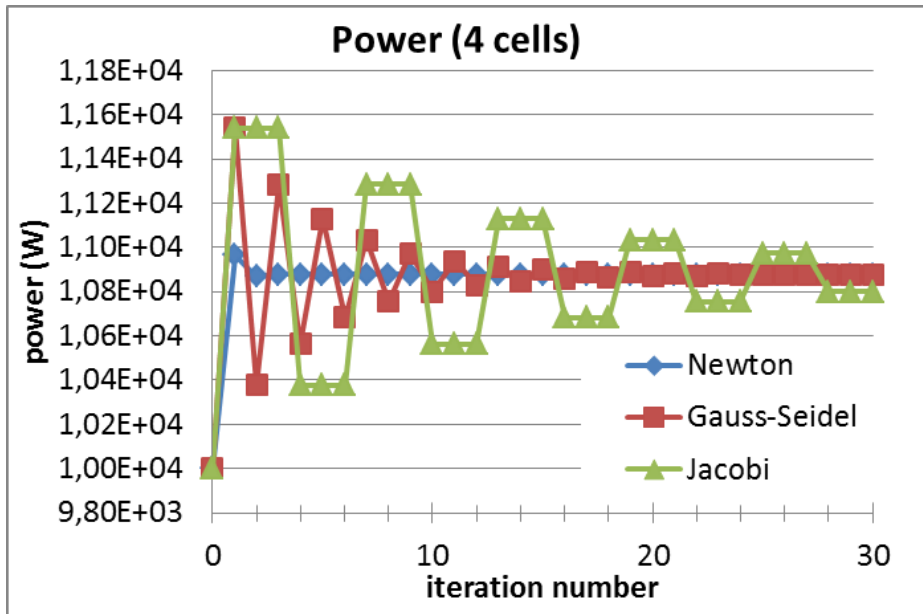
#### 4. Cas « académique » considéré

- Rectangle 2D 10cm\*8cm, 4 et 100 mailles identiques.
- Flux neutronique et température nuls au bord. Déplacements d'un coin nuls. Celui en X d'un autre coin également nul pour empêcher les rotations.
- Caractéristiques thermomécaniques de Godiva, sauf la capacité thermique qui est multipliée par  $10^{-6}$  pour accélérer l'évolution de  $T$ .
- Diffusion neutronique 2 groupes. 1 groupe de précurseurs ( $\beta = 500\text{pcm}$ ).
- Puissance initiale de  $10^4\text{W}$ .  $K_{eff}$  initial de 1.006 (surcritique prompte).
- 1 pas de temps de  $10^{-4}\text{s}$ .

# 3. EXEMPLE DE RÉOLUTION INTRIKUÉE

## 5. Résultats

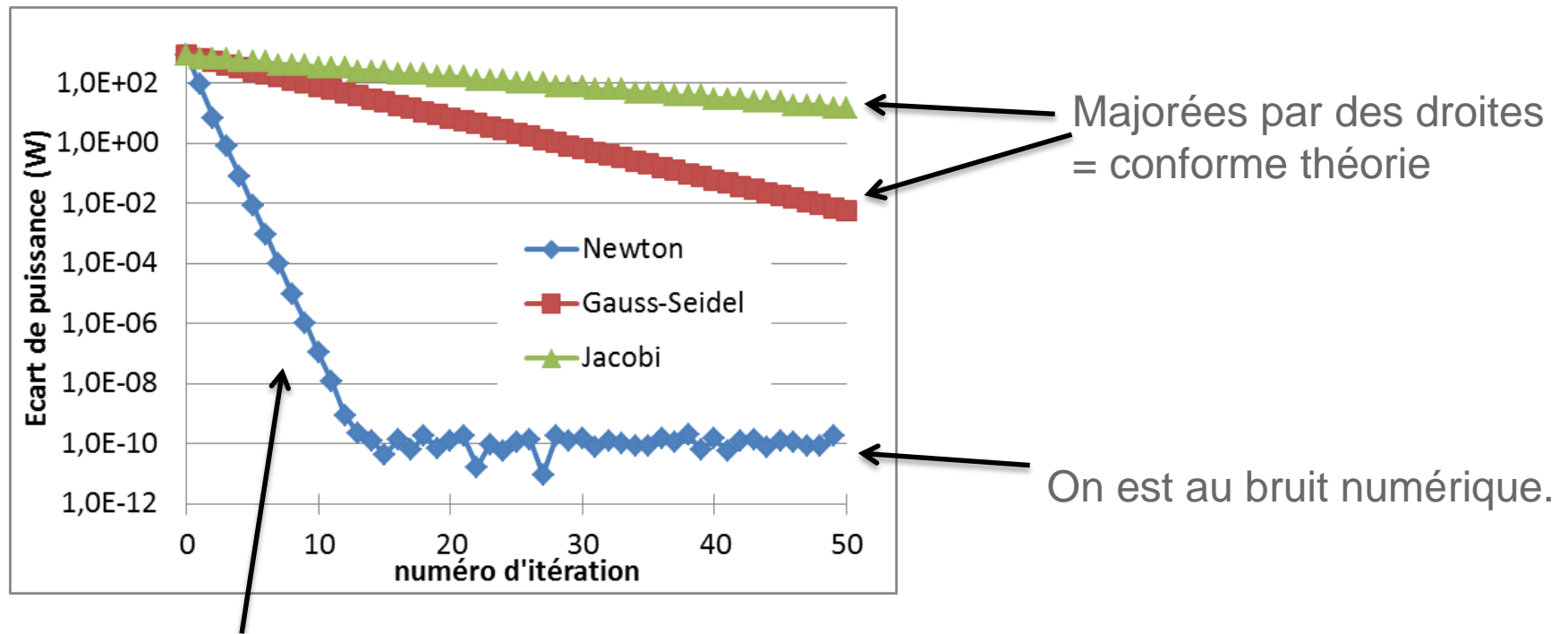
- Méthodes de point fixe pas toujours convergentes.
- Newton converge très vite !
- Jacobi très lent.



# 3. EXEMPLE DE RÉOLUTION INTRIKUÉE

## 5. Résultats

- En terme de vitesse de convergence (écart à la solution obtenue après 50 itérations de Newton) :



Droite  $\neq$  théorie ! Quelques approximations dans le calcul de la jacobienne.

- I. Méthodes générales de résolution numérique de problèmes couplés discrétisés
- II. La factorisation « quasi-statique » du flux neutronique pour des problèmes multiphysiques
- III. Exemple de résolution intriquée
- IV. Conclusion**

## 4. CONCLUSION

- Résoudre un couplage ne se limite pas à faire de la tuyauterie !
- De nombreux algorithmes génériques n'ont pas encore été testés en physique des réacteurs.
- En prenant en compte les spécificités des disciplines, il est peut-être possible d'inventer de meilleures méthodes de couplage :
  - Intérêt de la factorisation quasi-statique à confirmer.
  - « Intrication » de la résolution ?
- Attention, un couplage peut parfois poser des vraies questions de **modélisation** et donc de **V&V** !

**Merci de votre attention**